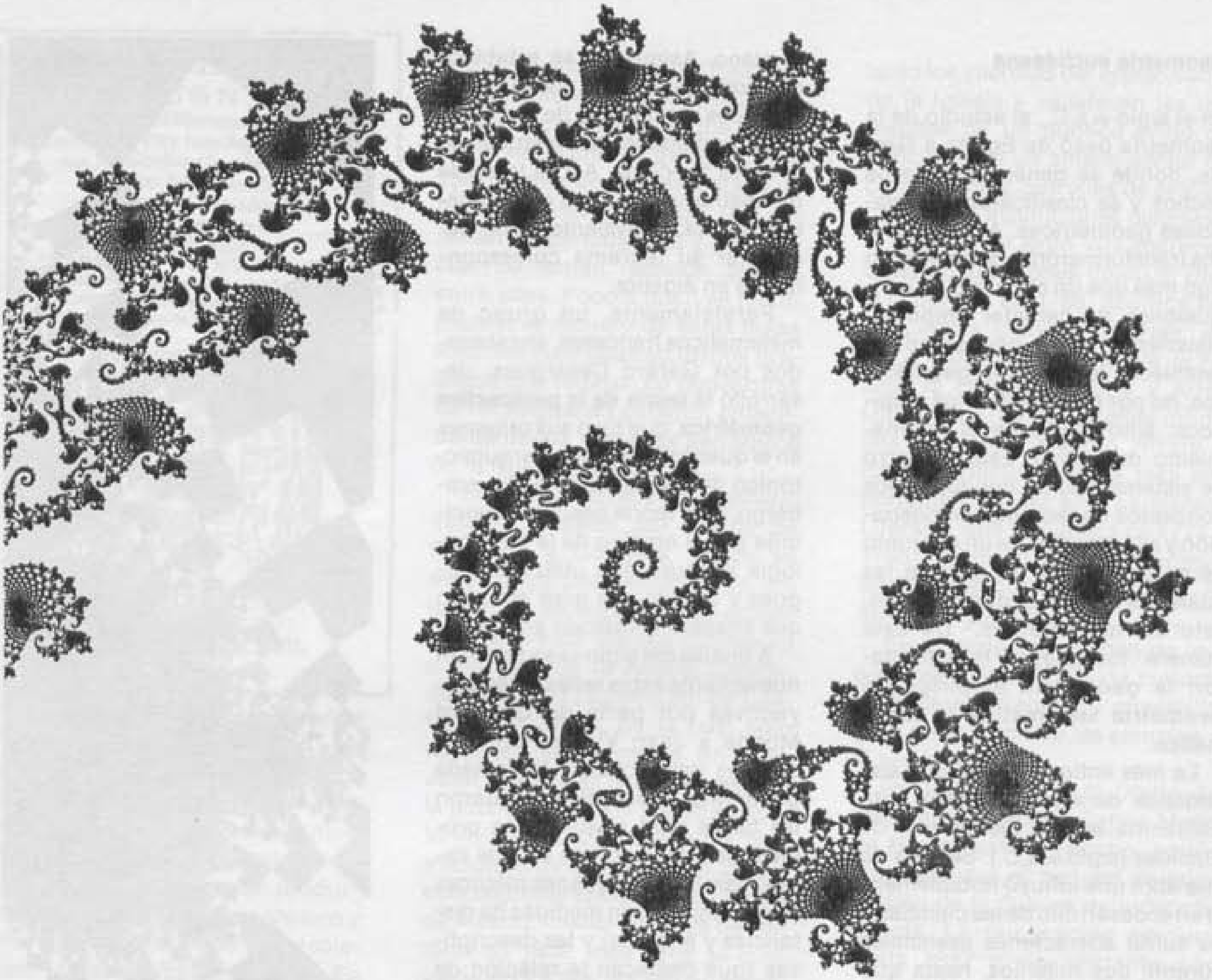


LA GEOMETRIA, ORIGEN Y DESARROLLO

Iñaqui de Olaizola Arizmendi*

Las primeras reflexiones geométricas que hizo el hombre tuvieron su origen en la simple observación de las formas geométricas y al comparar formas y tamaños. A partir de la observación de su entorno natural empezó a elaborar conceptos elementales como los de línea y superficie, lo que constituyó la llamada **geometría subconciente.**

Por otro lado, necesidades de carácter práctico y gran importancia plantearon el problema de las mediciones de las figuras geométricas. Desde la antigüedad el hombre se dedicó a la resolución de problemas relacionados con la obtención de la superficie de tierras lo mismo que del cálculo de capacidades de contenedores y almacenes.

Los egipcios y babilonios lograron solucionar algunos de estos problemas; sin embargo, fueron incapaces de sistematizar sus conocimientos geométricos. Su trabajo se caracterizó por la extracción de relaciones abstractas y generales, a partir de relaciones geométricas concretas. Se trató de una simple colección de reglas deducidas de la experiencia y que difícilmente se puede distinguir de la aritmética; los problemas geométricos eran, al mismo tiempo, problemas de cálculo aritmético. De esa manera se pasó de la **geometría subconsciente** a la **geometría científica**.

Geometría euclideana

En el siglo VII a.C., el estudio de la geometría pasó de Egipto a Grecia, donde se generaron nuevos hechos y se clasificaron las relaciones geométricas. Así, los griegos transformaron la geometría en algo más que un conjunto de conclusiones de carácter empírico. Insistieron en la necesidad de establecer los hechos geométricos, no por procedimientos empíricos, sino mediante el razonamiento deductivo. Este esfuerzo de sistematización condujo a los conceptos de teorema, demostración y a la elección de un conjunto de proposiciones a partir de las cuales es posible deducir el resto, esto es, los axiomas.[1] De esta manera, los griegos transformaron la geometría empírica en **geometría sistemática** o **matemática**.

La más antigua exposición sistemática de esta geometría está contenida en los *elementos*, de Euclides (siglo III a.C.). Se trata de una obra que influyó notablemente en el desarrollo de las ciencias y no sufrió alteraciones esenciales durante dos milenios, hasta que surgieron nuevos tipos de geometrías, igualmente válidas y útiles.

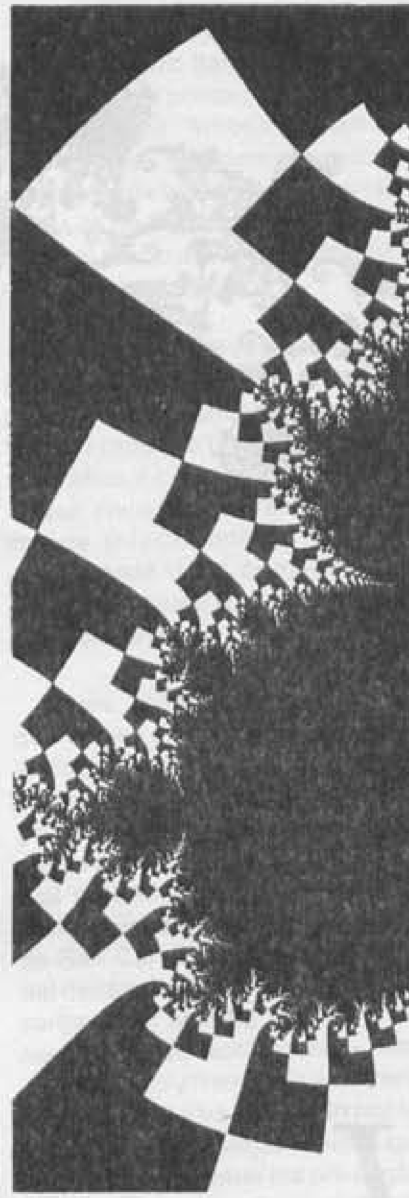
Hasta el siglo XVII el desarrollo de la geometría puede catalogarse como lo que Lákatos llama desarrollo de la ciencia normal: el corazón de la geometría no se modifica en lo absoluto, tan sólo se establecen nuevos hechos geométricos. Fueron Pierre de Fermat y, especialmente, René Descartes quienes propusieron un nuevo **método geométrico**. La idea fundamental consistió en establecer una correspondencia entre los puntos del plano y las parejas ordenadas de números reales y, de paso, establecer una relación entre las curvas en el plano y las ecuaciones con dos variables, de manera que para cada curva en el plano existe una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$. Y cada una de estas ecuaciones le corresponde una curva o conjunto de puntos en el plano. Asimismo, se establece una correspondencia entre las propiedades algebráicas de $f(x, y) = 0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada. Así, la tarea de demostrar un teorema en geometría resulta equivalente al de demostrar su teorema correspondiente en álgebra.

Paralelamente, un grupo de matemáticos franceses, encabezados por Gérard Desargues, desarrolló la **teoría de la perspectiva geométrica**, que tuvo sus origenes en el quehacer artístico y arquitectónico del Renacimiento. Sin embargo, esta teoría pasó desapercibida por el empleo de la terminología obscura que utilizó Desargues y debido a la gran atención que acaparó el método analítico.

A finales del siglo XIX se retoman nuevamente estas reflexiones proyectivas por parte de Gaspard Monge y Jean Victor Poncelet, quienes desarrollaron la llamada **geometría descriptiva**. Sentaron las bases para clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las propiedades métricas (que comprenden medidas de distancias y ángulos) y las descriptivas (que destacan la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí). Las propiedades descriptivas no se alteran cuando la figura es proyectada, mientras que las propiedades métricas sí se alteran en general por las proyecciones. El estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se conoce como **geometría proyectiva**.

Geometrías no euclideanas

Desde que aparecieron los *elementos* de Euclides, el postulado referente a las paralelas llamó poderosamente la atención[2]. No encajaba en la axiomática griega con la misma naturalidad con la que lo hacían los restantes postulados. No era tan evidente y, por otro lado, se podía pensar en la posibilidad de demostrarlo a partir de los demás axiomas o, por lo menos, reemplazarlo por otro más aceptable. Tal vez el sustituto más conocido fue el de John Playfair: **Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse otra paralela a ella.**



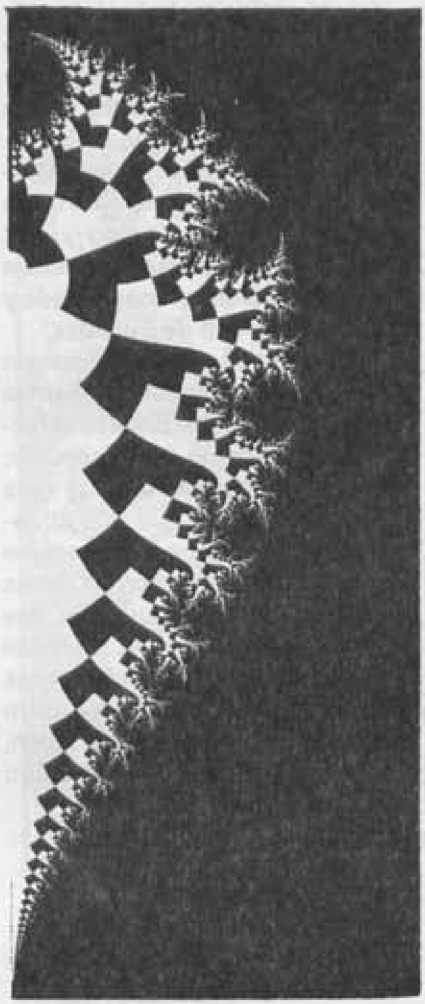
Durante siglos se intentó demostrar este postulado a partir de los otros pero fue hasta 1733 cuando Girolano Saccheri publicó la primera investigación científica acerca de este postulado. K.F. Gauss. J. Bolyai y N.I. Lobachevsky desarrollan la idea de la independencia del llamado quinto postulado y, en consecuencia, la posible sustitución por alguno de los siguientes planteamientos: **por un punto exterior a una recta pueden trazarse más de una, o únicamente una o ninguna paralela.**

Sin embargo, la independencia del postulado de las paralelas del resto de los postulados fue plenamente establecida sólo con las demostraciones que proporcionaron, entre otros, Beltrami Gayley, Klein y Poincaré. Bernhard Riemann dio un gran impulso al desarrollo de la geometría no euclideana mediante el uso de técnicas de la **geometría diferencial**. Sus trabajos contribuyeron, de manera importante, en la generalización del concepto de espacio abstracto.

Hasta ese momento se consideraba que existía sólo una geometría posible, en tanto que ésta era la descripción del espacio. Con la demostración de la existencia de otras geometrías, se hizo evidente que el espacio físico podía mirarse como un concepto empírico deducido de la experiencia y que los postulados de la geometría eran simples expresiones de esa experiencia. Este punto de vista estaba en contradicción con la teoría kantiana del espacio que dominaba el pensamiento filosófico en esa época.

Esta teoría sostenía que el espacio es un sistema de referencia que existe intuitivamente en la mente humana y que los axiomas y postulados de la geometría euclideana son juicios *a priori* impuestos en la mente. No es difícil imaginar el impacto que tuvo el descubrimiento de geometrías no euclideanas al acabar con el reinado indiscutible del sistema euclideano vigente por más de dos milenios y modelo a seguir por las ciencias. Asimismo, rompió con la idea de la *verdad absoluta* en las matemáticas. Estas se contemplaron entonces como una creación arbitraria de la mente humana y no como algo impuesto por el mundo en que vivimos.

En todas estas geometías se aplicaron las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones como formadas por puntos. Todas ellas ejemplos de las llamadas **geometrías puntuales**. Existen, sin embargo, geometrías en las que se eligen como elementos



fundamentales entidades distintas de los puntos como, por ejemplo, la **geometría lineal (o tangencial)**, la **circular** y la **esférica**. Todas ellas pueden considerarse como teorías de las invariantes de ciertos grupos de transformaciones.

Este tipo de consideraciones condujo a Felix Klein a una definición de geometría que abrió nuevos campos de investigación: una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto S que permanecen invariantes cuando los elementos de S se someten a transformaciones de un cierto grupo[3] de transformaciones G. Así pues, al definir una geometría que elige el elemento fundamental de dicha geometría (punto, línea, circunferencia, etcétera) así como el espacio de estos elementos y el grupo de transformaciones a las que debe someterse el espacio. El desarrollo de esta hipótesis, el programa de Erlangen, permitió clasificar a las geometrías[4] y crear e investigar nuevas ramas de la geometría.

En este contexto, la geometría euclideana resulta de la combinación de dos geometrías básicas: La **geometría plana euclideana** y la **geometría plana equiforme**, cada una de ellas relacionada con los invariantes de un grupo de transformaciones. La primera estudia aquellas propiedades de las figuras de un plano limitado que son invariantes respecto del grupo de isometrías planares (longitud, área, congruencia, paralelismo, colinealidad, etcétera). La segunda se refiere al estudio de las propiedades de las figuras de un plano limitado que son invariantes bajo el grupo de semejanzas planares. En este caso, propiedades como longitud, área y congruencia dejan de ser invariantes. La **geometría proyectiva plana** es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano limitado invariantes bajo las llamadas transformaciones proyectivas.

De las propiedades antes mencionadas sólo permanecen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Cuando se generaliza a figuras en un plano ilimitado y se considera a las invariantes de un grupo de transformaciones que convierten cierta recta al infinito en sí misma, se habla de la **geometría afín plana**. Por último, el estudio de las propiedades de las figuras en un plano ilimitado invariantes bajo el grupo de transformaciones que convierten a una recta en sí misma y a un punto fijo fuera de ella, en sí mismo se conoce también como **geometría centroafín plana**.

En lo que va del siglo se han dado importantes desarrollos en las geometrías, como la generalización de los espacios abstractos y n-dimensionales, la geometría diferencial o la topología que surgió como una rama de la geometría para luego independizarse. Sin embargo, la aparición de la **geometría fractal** sea tal vez el acontecimiento más importante.

La geometría fractal

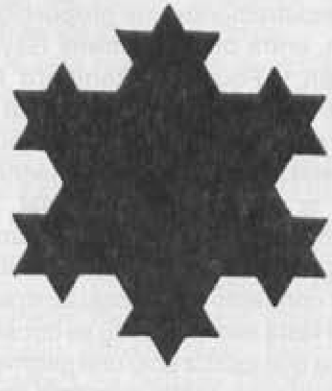
Muchas de las formas que observamos en la naturaleza no son fácilmente descritas por la geometría euclideana. Las montañas no son conos ni las nubes círculos. En realidad, suelen mostrar una estructura jerárquica compleja. Estructuras semejantes se encuentran al estudiar las variaciones de precios o la transmisión electrónica de información y la estabilidad de una gran cantidad de sistemas dinámicos.

Nuestro planeta o una esfera se parecerían, desde suficiente distancia, a un punto. Un cierto acercamiento permitiría apreciarlas como pequeños círculos y vistas de más cerca revelarían su tercera dimensión. Ciertos litorales representaoos en un mapa pueden aproximarse por arcos de circunferencia. Pero si aumentamos la escala del mapa advertimos irregularidades que hacen imposible tal aproximación.

Benoit Mandelbrot, a partir de 1975, empezó a utilizar un lenguaje capaz de ordenar el caos de las formas en la naturaleza mediante la llamada geometría fractal, ante la impotencia de la geometría euclideana y del cálculo diferencial para explicar la infinita variedad e irregularioad de las formas naturales.

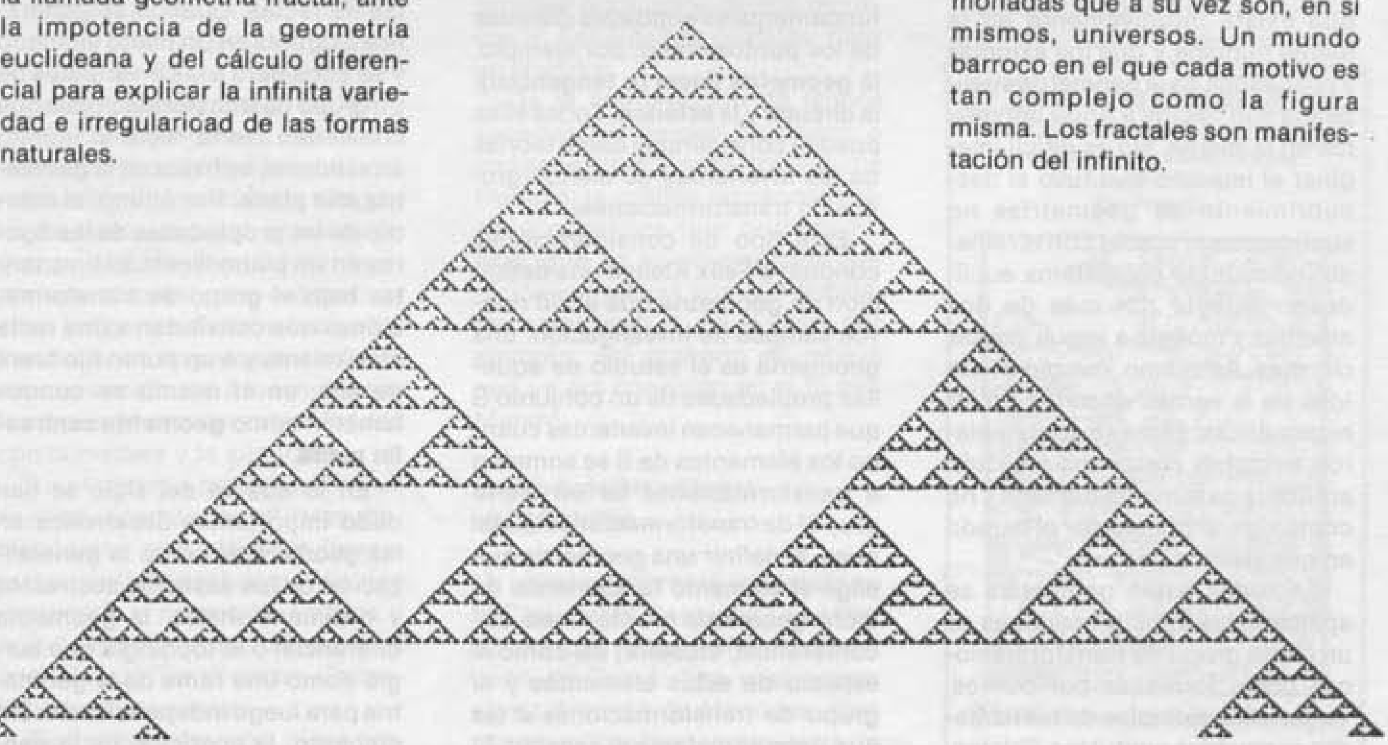
La geometría fractal se caracteriza por hacer dos tipos de elección: aquellos problemas localizados en el seno del caos de la naturaleza y, la elección de herramientas en el interior de las matemáticas. A través del tiempo, estas elecciones han creado algo nuevo: el **orden fractal, que se ubica entre el dominio del caos incontrolado y el excesivo orden de Euclides.**

Si las medidas euclideanas son incapaces de describir la esencia de tales figuras, es preciso reformular el concepto de dimensión, la cual depende del punto de vista de la escala en la que nos situemos. Además, debe incorporarse a la irregularidad como una de las cualidades de la figura. En ese sentido, existen figuras fractales que, de acuerdo con los elementos anteriores, tienen una dimensión fraccionaria. La curva de Koch, por ejemplo, tiene un dimensión igual a log4/log3 = 1.2618.



La Curva de Koch

Figuras como la curva de Koch que se repiten a sí mismas en escalas cada vez menores se denominan autosimilares. La autosimilitud es una simetría con respecto a la escala. Corresponde a un orden más cercano a Leibnitz que a Platón. Un universo formado por mónadas que a su vez son, en sí mismos, universos. Un mundo barroco en el que cada motivo es tan complejo como la figura misma. Los fractales son manifestación del infinito.

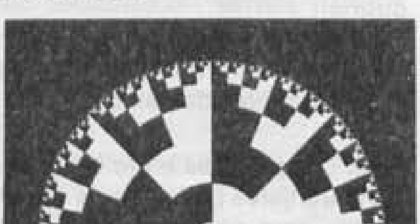


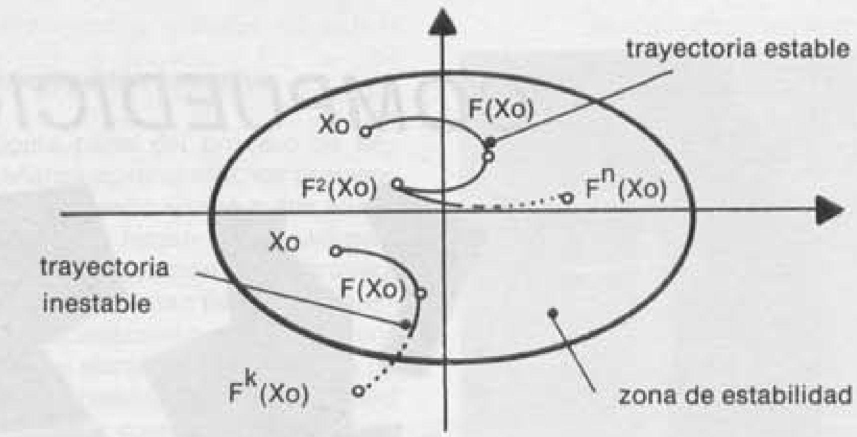
El Triángulo de Sierpinski

La Autosimilitud implica recursión, que ilustra perfectamente la imagen de Swift de la mosca de la mosca y así al infinito. Constituye también un método básico para generar fractales: la aplicación iterativa de un conjunto de transformaciones. Un ejemplo de ello es el triángulo de Sierpinski que se genera aplicando a cualquier conjunto no vacío de puntos en el plano un conjunto de tres transformaciones contractivas.

El desarrollo de las computadoras permitió el estudio de los sistemas dinámicos mediante el análisis numérico y sus manifestaciones gráficas. Por sistema dinámico se entiende un fenómeno que puede ser descrito mediante un conjunto de variables (Xi) y una ley de transformación de la forma $Xi^{n+1} = F(Xi^n, t)$ donde t es el tiempo. Son de especial importancia aquellos puntos del espacio para los cuales el sistema es estable. Esto es, $//F(Xi^n, t)//$ permanece acotado cuando $t \to \infty$. Otro importante método para generar fractales consiste en pintar un mapa del comportamiento de un sistema dinámico con dominio en el plano, mediante un computador, pintando cada pixel de la pantalla con un color según la rapidez con que el sistema diverge y negro si el sistema es estable.

La geometría fractal ha encontrado importantes aplicaciones en diversos campos, entre los que vale la pena mencionar el análisis del ruido en las transmisiones y la simulación del movimiento Browniano. Otro campo de gran importancia es el de la graficación por computadora, donde esta herramienta ha sido utilizada, por ejemplo, para crear paisajes que sirven de escenario para películas de animación.





Notas

[1] La estructura de la geometría sistemática puede resumirse de la siguiente manera:
a) Explicación inicial de los términos básicos (punto, línea, etcétera),
b) establecimiento de axiomas o postulados para relacionar los conceptos básicos que se consideran verdades aceptables,
c) Definición de todos los demás términos por medio de los términos básicos y
d) deducción lógica de todas las demás propiedades del discurso, a partir de los axiomas. Estas propiedades reciben el nombre de teoremas.

[2] Los axiomas de la geometría euclideana son:
a) una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro,
b) una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida,
c) una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia,
d) todos los ángulos rectos son iguales entre sí y
e) si una recta que corte a otras dos forma con estas ángulos interiores del mismo lado de ella, que sumados sean menores que dos rectas, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

El mismo Euclides pospuso lo más posible la introducción del quinto postulado en su libro, seguramente porque dudaba de dicho postulado.

[3] Las nociones de **grupo** y de **transformación** son de gran importancia en la matemática. Los grupos constituyen las estructuras algebráicas básicas. Un grupo (**G***) es un conjunto **G**, junto con una operación binaria* definida en **G**, tal que satisface los siguientes axiomas:
i) **G** es cerrado bajo*,
ii) la operación* es asociativa,
iii) existe en **G** un elemento **e** neutro bajo*, esto es, **e*x** = **x*e** para todo **x** elemento de **G** y
iv) para cada **x** elemento de **G** existe **x'** su inverso, esto es **x' *x** = **x* x'** = **e**.

El concepto de transformación corresponde con el de función: una relación entre los elementos de dos conjuntos que cumple que todos los elementos del primer conjunto tienen uno y sólo uno de los elementos del segundo conjunto con el que están relacionados. Frecuentemente se utiliza el concepto de transformación para hablar de funciones que relacionan conjuntos de puntos, por ejemplo, puntos en el plano. Ejemplos de estas transformaciones son: rotaciones, reflexiones y contracciones. Podemos considerar un conjunto de transformaciones junto con la operación de composición de funciones y de satisfacer los axiomas de grupo y tener entonces un **grupo de transformaciones**.

[4] El programa de Erlangen permitió clasificar a las geometrías. Estas se caracterizaron por un grupo de transformaciones de tal forma que se relacionan de la misma forma como se relacionan entre sí dichos grupos de transformaciones. De esta forma, el grupo de transformaciones de la geometría afín plan es un subgrupo del grupo de transformaciones correspondiente a la geometría proyectiva plan y, por tanto, todo teorema de la geometría proyectiva plana lo es también de la geometría afín plana. Se puede construir la sucesión (métrica euclideana, equiforme, centroafín, afín y proyectiva), donde el orden está dado por la relación de inclusión de un grupo de transformaciones en otro. Esta sucesión ilustra la afirmación de Cayley de que la "geometría proyectiva contiene toda la geometría", en el sentido de que todo teorema de la geometría proyectiva lo es también de las otras geometrías.

*Investigador del Departamento de Tecnología y Producción. Actualmente trabaja en la investigación: *Las geometrías y el diseño.*